

ANALÍZIS I.

Nulláról felzárkóztató tanulási jegyzet

Sorozatok • konvergencia • ε -N definíció • korlátosság • monotonitás • határértékek • trigonometria
alapok

Ezt jegyezd meg - Hogyan használd ezt a jegyzetet

A főszöveg az egyetemi anyagot vezeti végig. A kék „Mit jelent ez?” dobozok hétköznapi nyelvre fordítanak; a lila „Jelmagyarázat” dobozok minden új jelet kibontanak; a zöld példák végigvezetnek a számoláson; a piros dobozok a tipikus hibákat mutatják. Ha egy képlet elsőre idegen, ne ugord át a jelmagyarázatot.

Verzió: AN1-20260912-R5 • Dátum: 2026-09-12 • Forrás: az első analízisórák R1-R7 jelölésű kézírásos jegyzetei.

0. Matematikai nyelv: hogyan olvass képleteket?

Az analízisben sokszor nem maga a számolás a legnehezebb, hanem a jelölések olvasása. Ezért először létrehozunk egy közös „szótárat”.

0.1. Latin betűk, indexek és felső indexek

Mit jelent ez? - Mi az index?

Az a_n jelölésben az „a” a sorozat neve, az alsó n pedig megmondja, hányadik tagról beszélünk. a_1 az első tag, a_2 a második, a_{10} a tizedik. Az n általában pozitív egész szám.

$$a_n = 1/n$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

a: a sorozat neve • n: index: a tag sorszáma, $n \in \mathbb{N}$ • a_n : az n -edik tag • $1/n$: az n -edik tag kiszámítási szabálya

Gyakori hiba - Alsó index $\neq$ szorzás

a_n nem azt jelenti, hogy $a \cdot n$. Az alsó index címke/sorszám. Ezzel szemben $a \cdot n$ valóban szorzás.

Mit jelent ez? - Felső index

A felső index legtöbbször hatvány: $n^2 = n \cdot n$, q^n pedig q önmagával vett n -szeres szorzata. Kivétel lehet például $\sin^2 x$, ami $(\sin x)^2$ -t jelent.

0.2. Halmazjelek és logikai jelek

Jel	Olvasd így	Jelentés
$\mathbb{N}$	természetes számok	1,2,3,...; ebben a jegyzetben az indexek halmaza
$\mathbb{Z}$	egész számok	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{R}$	valós számok	a számegyenes számai
$\in$	elem	$n \in \mathbb{N}$: n természetes szám
$\forall$	minden	$\forall n$: minden n-re
$\exists$	létezik	$\exists N$: van olyan N
$\Rightarrow$	következik	bal oldalból következik a jobb
$\Leftrightarrow$	akkor és csak akkor	a két állítás ekvivalens
$ x $	x abszolútértéke	x távolsága 0-tól

0.3. Görög betűk - mini szótár

A görög betűk nem „különleges számok”: ugyanúgy változók vagy rögzített jelölések, mint az x vagy az n. A jelentésüket mindig a környezet adja.

Jel	Név / kiejtés	Gyakori szerep	Ebben a jegyzetben
ε	epszilon	kicsi pozitív hibahatár/pontosság	a konvergencia definíciójának pontossága
π	pí	körállandó $\approx 3,14159$	radiánmérés, trigonometria
α	alfa	szög vagy paraméter	általános szög
Δ	delta	változás/különbség	háttérjelölés; pl. $\Delta x = x_{\text{új}} - x_{\text{régi}}$
Σ	nagy szigma	összegzés	háttérjelölés; későbbi soroknál gyakori
σ	kis szigma	szórás vagy paraméter	ebben az anyagrészben még nincs központi szerepe
μ	mú / „mű”	átlag vagy paraméter	ebben az anyagrészben még nincs központi szerepe

Ezt jegyezd meg - A jel jelentése nem örök

Ugyanaz a betű más tárgyban mást jelenthet. A μ statisztikában gyakran várható érték/átlag, fizikában más mennyiséget is jelölhet. Mindig azt nézd, hogyan definiálja az adott fejezet.

1. Sorozatok - végtelen, sorszámozott számlisták [R1-SOR-01, R6-SOR-01]

Mit jelent ez? - Mi a sorozat?

Képzeld el egy végtelen táblázatot: az első oszlopban 1,2,3,... áll, a másodikban pedig minden sorszámmal egy számot rendelünk. A hozzárendelési szabály maga a sorozat.

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

a : a sorozat neve • $\mathbb{N}$: az indexek halmaza • $\mathbb{R}$: a lehetséges értékek halmaza • n : a tag sorszáma • a_n : az n -edik tag

1.1. Explicit megadás

Explicit képletnél közvetlenül behelyettesítjük n értékét.

$$a_n = (3n+1)/(n+2)$$

Példa - Az első négy tag

$n=1$: $a_1=(3 \cdot 1+1)/(1+2)=4/3$. $n=2$: $a_2=7/4$. $n=3$: $a_3=10/5=2$. $n=4$: $a_4=13/6$. A behelyettesítésnél az n minden előfordulását ugyanazzal a sorszámmal cseréljük.

1.2. Rekurzív megadás

Rekurzív szabálynál az új tagot egy korábbi tagból számoljuk. Ehhez kezdőérték is kell.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (a_n+2)/2$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

a_1 : kezdőtag • a_n : aktuális tag • a_{n+1} : következő tag • $n+1$: az n utáni index

Példa - Rekurzió lépésről lépésre

$a_1=1$. Ezután $a_2=(1+2)/2=1,5$. Majd $a_3=(1,5+2)/2=1,75$. A szabályt mindig az előző tagra alkalmazzuk.

Gyakori hiba - A sorozat nem egyetlen szám

Az (a_n) az egész sorozatot jelenti, az a_n pedig egy általános tagot. A kettőt ne keverd össze.

1.3. Viselkedés: mit figyelünk?

- Közelednek-e a tagok egy számhoz? $\rightarrow$ konvergencia.
- Elszállnak-e egyre nagyobb pozitív/negatív értékek felé? $\rightarrow$ végtelenhez tartás.
- Váltakoznak vagy oszcillálnak? $\rightarrow$ lehet, hogy nincs határérték.

- Mindig nőnek vagy mindig csökkennek? → monotonitás.
- Benne maradnak-e egy rögzített intervallumban? → korlátosság.

2. Határérték és konvergencia - mit jelent, hogy „oda tart”? [R1-KONV-01, R2-KONV-01, R5-KONV-01]

A hétköznapi „egyre közelebb kerül” mondatot az analízis pontos definícióvá alakítja. A lényeg: bármilyen szigorú pontosságot kérsz, egy pont után minden tag teljesíti.

$$a_n \rightarrow A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

a_n : a sorozat n -edik tagja • A : a feltételezett határérték • ε : epsilon: tetszőleges pozitív hibahatár • N : küszöbindex • $n \geq N$: csak a sorozat elég késői tagjait nézzük • $|a_n - A|$: a_n távolsága A -tól

Mit jelent ez? - A definíció emberi nyelven

Te mondasz egy $\varepsilon > 0$ pontosságot. Nekem erre kell találnom egy N sorszámot. Ha ezután bármely $n \geq N$ indexet választod, az a_n tag már A -tól ε -nál kisebb távolságra lesz. Nem elég néhány tag: N után mindegyiknek bent kell maradnia.

2.1. Miért abszolútérték?

$$|a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

Mit jelent ez? - ε -környezet

Az abszolútérték azt mondja, hogy a_n az A körüli $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumban van. Nem számít, balról vagy jobbról közelít.

2.2. Az N függhet ε -tól

Minél kisebb ε -t kérünk, általában annál később kell mennünk a sorozatban. Ezért írjuk gyakran $N(\varepsilon)$ -nak.

Példa - $1/n \rightarrow 0$ konkrét számokkal

Ha $\varepsilon = 0,1$, akkor $1/n < 0,1$ -hez $n > 10$ kell, tehát $N = 11$ jó. Ha $\varepsilon = 0,001$, akkor $n > 1000$ kell, tehát $N = 1001$ jó. A szigorúbb pontossághoz nagyobb N tartozik.

2.3. Bizonyítási recept ε - N módszerrel

1. Írd fel a célt: $|a_n - A| < \varepsilon$.
2. Algebrailag alakítsd át úgy, hogy n -re kapj feltételt.
3. Válassz egy természetes $N(\varepsilon)$ -t, amely biztosan teljesíti ezt.
4. Fordítsd vissza: $n \geq N$ esetén valóban következzon $|a_n - A| < \varepsilon$.
5. Mondd ki: mivel ez minden $\varepsilon > 0$ -ra működik, $a_n \rightarrow A$.

2.4. Végigvezetett példa: $1/n \rightarrow 0$ [R1-EN-02]

$$|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$$

Pozitív n és ε mellett az $1/n < \varepsilon$ egyenlőtlenségből $n > 1/\varepsilon$ adódik. Olyan egész N kell, amely ennél nagyobb.

$$N(\varepsilon) = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

$\lfloor x \rfloor$: x alsó egészrésze: a legnagyobb x -nél nem nagyobb egész • $N(\varepsilon)$: ε -tól függő küszöbindex

Példa - Ellenőrzés

Ha $n \geq N(\varepsilon) = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$, akkor $n > 1/\varepsilon$. Pozitív számok reciprokánál az egyenlőtlenség iránya megfordul: $1/n < \varepsilon$. Ez pontosan a definícióban kért feltétel.

Gyakori hiba - N nem lehet valós tetszőleges szám

N index, ezért természetes számnak kell lennie. Ha a számolásból például $n > 12,3$ jön ki, $N=13$ jó választás.

3. További ε -N példák - a módszer begyakorlása

3.1. $a_n = 1/n^2 \rightarrow 0$ [R2-EN-01]

$$|1/n^2| < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > 1/\varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\sqrt{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \lfloor 1/\sqrt{\varepsilon} \rfloor + 1$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

$\sqrt{\varepsilon}$: epsilon négyzetgyöke • n^2 : $n \cdot n$ • $1/n^2$: a sorozat n -edik tagja

Példa - $\varepsilon=0,01$

$\sqrt{0,01}=0,1$, ezért $1/\sqrt{\varepsilon}=10$. $N=11$ választással minden $n \geq 11$ esetén $1/n^2 \leq 1/121 < 0,01$.

3.2. $a_n = (3n+1)/(n+2) \rightarrow 3$ [R2-EN-03]

Először nem találgatjuk N -et, hanem kiszámítjuk a határértéktől való távolságot.

$$|(3n+1)/(n+2) - 3| = 5/(n+2)$$

A cél $5/(n+2) < \varepsilon$. Ebből $n+2 > 5/\varepsilon$, vagyis $n > 5/\varepsilon - 2$.

$$N(\varepsilon) = \max\{1, \lfloor 5/\varepsilon - 2 \rfloor + 1\}$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

$\max\{\dots\}$: a felsorolt számok közül a nagyobb • 3: a bizonyítandó határérték • $5/(n+2)$: a tényleges hiba nagysága

Példa - $\varepsilon=0,1$

$5/\varepsilon - 2 = 50 - 2 = 48$, ezért $N=49$ jó. Ha $n \geq 49$, akkor $5/(n+2) \leq 5/51 \approx 0,098 < 0,1$.

Gyakori hiba - A határérték és a sorozattag összekeverése

$A=3$ nem azt jelenti, hogy a sorozat valamelyik ponttól pontosan 3 lesz. Csak azt, hogy tetszőlegesen közel kerül 3-hoz.

3.3. Általános minta: $1/n^k \rightarrow 0, k > 0$

$$1/n^k < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon^{1/k}$$

Itt k egy rögzített pozitív valós szám. Ha $k=2$, négyzetgyökök; ha $k=3$, köbgyökök jelennek meg.

4. Korlátosság és monotonitás [R1-KORL-01, R5-KORL-01, R6-MON-01]

4.1. Korlátosság

Mit jelent ez? - Korlátos sorozat

A sorozat tagjai nem tudnak tetszőlegesen messz elszökni. Van egy rögzített „kerítés”, amely minden tagot bent tart.

$$\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

K : egy rögzített pozitív korlát • $\forall n$: minden indexre • $|a_n| \leq K$: a_n a $[-K, K]$ intervallumban van

Példa - $(-1)^n$ korlátos

A tagok csak -1 és 1 lehetnek. Ezért $|a_n| = 1$, így például $K=1$ megfelelő korlát. Fontos: attól, hogy korlátos, még nem konvergens.

4.2. Monotonitás

$$\text{növekvő: } a_{n+1} \geq a_n \quad \text{csökkenő: } a_{n+1} \leq a_n$$

Mit jelent ez? - Monoton

A monoton sorozat egy irányban halad: nem fordul vissza. A „monoton növekvő” megengedi az egyenlőséget; a „szigorúan növekvő” minden lépésben valódi növekedést kér.

4.3. Hogyan vizsgáljuk?

Gyakori módszer az $a_{n+1} - a_n$ előjelének vizsgálata. Ha mindig pozitív, a sorozat szigorúan növekvő.

$$a_n = n/(n+1)$$

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)/(n+2) - n/(n+1) = 1/((n+1)(n+2)) > 0$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

a_{n+1} : a következő tag • >0 : a különbség pozitív, tehát a következő tag nagyobb

Példa - Korlát is van

$n/(n+1) < 1$ minden pozitív n -re, tehát a sorozat felülről korlátos 1-gyel. Növekvő + felülről korlátos: ez már a monoton konvergencia tétel helyzete.

4.4. Monoton konvergencia tétel

Ezt jegyezd meg - Kulcstétel

Minden monoton növekvő és felülről korlátos valós sorozat konvergens. Minden monoton csökkenő és alulról korlátos valós sorozat konvergens.

Gyakori hiba - A feltételek közül egyik sem hagyható el

Az $a_n = n$ növekvő, de nem felülről korlátos, ezért nem konvergens valós számhoz. A $(-1)^n$ korlátos, de nem monoton, és nem konvergens.

5. Határérték-számítási szabályok [R2-HAT-01, R7-HAT-01]

Ha már tudjuk két sorozat határértékét, sok összetett kifejezés határértéke algebrai szabályokkal kiszámítható.

$$a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow A + B, a_n b_n \rightarrow AB$$

$$a_n / b_n \rightarrow A/B, \text{ ha } B \neq 0 \text{ és } b_n \text{ végül nem nulla}$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

b_n : egy másik sorozat n -edik tagja • B : b_n határértéke • végül: egy bizonyos indextől kezdve minden további tagra

Gyakori hiba - 0-val osztás

A hányados szabályát nem használhatjuk automatikusan, ha a nevező határértéke 0. Ilyenkor külön elemzés kell.

5.1. Racionális kifejezések

Polinomok hányadosánál az n legmagasabb hatványával való osztás teszi láthatóvá a domináns tagokat.

$$(2n^2 - 5n + 1) / (7n^2 + 3) = (2 - 5/n + 1/n^2) / (7 + 3/n^2) \rightarrow 2/7$$

Mit jelent ez? - Domináns tag

Nagy n mellett az n^2 sokkal gyorsabban nő, mint n vagy 1. Ezért a legmagasabb fokú tagok együtthatói határozzák meg a határértéket, ha a fokszám azonos.

5.2. Végtelenhez tartás

Mit jelent ez? - $a_n \rightarrow +\infty$

Ez nem valós határérték. Azt jelenti: bármilyen nagy $M > 0$ számot mondasz, a sorozat egy pont után minden taggal M fölött lesz.

$$a_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N \forall n \geq N : a_n > M$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

M : tetszőlegesen nagy pozitív küszöb • $+\infty$: pozitív végtelen; nem valós szám

Példa - $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$

Ha $\sqrt{n} > M$ -et akarunk, négyzetre emelve $n > M^2$. Választhatunk $N = \lfloor M^2 \rfloor + 1$ -et.

6. Rendőrelv és becslések [R7-HAT-03]

Mit jelent ez? - Közrefogási tétel

Ha a vizsgált sorozat két olyan sorozat közé szorul, amelyek ugyanoda tartanak, akkor ő sem tud máshová menni.

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \quad b_n \rightarrow L, \quad c_n \rightarrow L \Rightarrow a_n \rightarrow L$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

b_n : alsó becslő sorozat • a_n : vizsgált sorozat • c_n : felső becslő sorozat • L : közös határérték

6.1. Példa: $\sin n / n \rightarrow 0$

A szinusz értéke mindig -1 és 1 között van. Ezért $|\sin n| \leq 1$.

$$|\sin n / n| \leq 1/n \rightarrow 0$$

Példa - Mi történt?

Nem próbáltuk kiszámolni $\sin n$ viselkedését, mert az oszcillál. Helyette a teljes tört abszolútértékét egy egyszerűbb, 0-hoz tartó sorozattal becsültük.

Gyakori hiba - A $\sin n$ argumentuma radián

Analízisben, ha nincs fokjel, n radiánt jelent. A becsléshez ez nem gond, mert $|\sin x| \leq 1$ minden valós x -re.

7. Hatványok és geometriai sorozatok [R5-GEO-01, R6-GEO-01]

A q^n alakú sorozatok viselkedése attól függ, milyen messze van q a 0-tól és az 1-től.

q feltétele	q^n viselkedése	Példa
$ q < 1$	$q^n \rightarrow 0$	$(2/3)^n \rightarrow 0$
$q = 1$	$q^n = 1$	$1^n = 1$
$q > 1$	$q^n \rightarrow +\infty$	$2^n \rightarrow +\infty$
$q = -1$	váltakozik, nincs határérték	$(-1)^n$
$q < -1$	előjel váltakozik és $ q^n $ nő	$(-2)^n$

7.1. Példa: $3^n / (2^n + 3^n)$

$$3^n / (2^n + 3^n) = 1 / ((2/3)^n + 1) \rightarrow 1$$

Mit jelent ez? - Miért osztunk 3^n -nel?
A nevezőben 3^n a gyorsabban növekvő exponenciális tag. Osztás után megjelenik $(2/3)^n$, amely 0-hoz tart.

7.2. Nevezetes exponenciális határértékek

$$(1 + 1/n)^n \rightarrow e$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei
e: Euler-szám, kb. 2,71828 • n: pozitív egész index • $\rightarrow$: határértékben tart

Az e az analízis egyik alapállandója. A későbbi exponenciális és logaritmikus függvényeknél központi szerepe lesz.

8. Trigonometria az analízishez - az alapoktól [R3-TRIG-01..05, R4-TRIG-01..04]

8.1. Fok és radián

Mit jelent ez? - Mi a radián?

A radián szögmérték, amely a körív hosszát a sugárhoz viszonyítja. Egy teljes kör 2π radián, fél kör π radián.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad 180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \pi/2$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

π : pí, kb. 3,14159 • rad: radián rövidítése • °: fokjel

Fok	Radián
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
360°	2π

8.2. Egységkör

$$P(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

α : alfa: a vizsgált szög • $P(\alpha)$: az egységkör α szöghöz tartozó pontja • $\cos \alpha$: a pont x-koordinátája • $\sin \alpha$: a pont y-koordinátája

Mit jelent ez? - Miért jó az egységkör?

Egyetlen ábrából leolvasható a szinusz és koszinusz előjele, periódusa és sok nevezetes értéke. A kör sugara 1, ezért a koordináták közvetlenül $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$.

8.3. Tangens

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha, \quad \text{ha } \cos \alpha \neq 0$$

Gyakori hiba - A tangens nem mindenhol értelmezett

Ha $\cos \alpha = 0$, akkor a képlet nevezője 0 lenne. Ezért például $\alpha = \pi/2 + k\pi$ helyeken a tangens nem

értelmezett.

9. Trigonometriai azonosságok és egyenletek

9.1. Pitagorasz-i azonosság

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

x : tetszőleges valós szög radiánban • $\sin^2 x$: $(\sin x)^2$ • $\cos^2 x$: $(\cos x)^2$

Mit jelent ez? - Honnan jön?

Az egységkör pontja $(\cos x, \sin x)$, és a kör egyenlete $X^2 + Y^2 = 1$. Behelyettesítve pontosan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

9.2. Összeg- és különbségképletek

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Ezt jegyezd meg - Előjelek

Szinusznál az összegképletben ugyanaz az előjel jelenik meg, koszinusznál az előjel „fordul”: $\cos(x+y)$ -ban mínusz van.

9.3. Redukciós képletek

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

Mit jelent ez? - Páros és páratlan

A $\cos$ páros függvény: $\cos(-x) = \cos x$. A $\sin$ páratlan: $\sin(-x) = -\sin x$. Ez geometriailag az egységkör tengelyes tükrözéséből látszik.

9.4. Alapegyenletek

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

k : tetszőleges egész szám • $k\pi$: a periódusok felsorolására szolgál • $\mathbb{Z}$: egész számok halmaza

Gyakori hiba - Ne csak egy megoldást adj!

Trigonometrikus egyenletnél általában végtelen sok megoldás van. Ha a feladat nem korlátozza x tartományát, a $k \in \mathbb{Z}$ paramétert is meg kell adni.

10. Végigvezetett trigonometriai feladatok

10.1. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ [R4-TRIG-03]

A kifejezés a $\sin x$ -ben másodfokú. Ezért ideiglenesen új változót vezetünk be.

$$y = \sin x$$

Jelmagyarázat - A képlet jelei

y: segédváltozó; csak a számolás egyszerűsítésére • x: az eredeti ismeretlen szög

$$2y^2 - y - 1 = (2y+1)(y-1) = 0$$

Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényező 0: $y = -1/2$ vagy $y = 1$. Most visszahelyettesítünk.

$$\sin x = 1 \quad \text{vagy} \quad \sin x = -1/2$$

Példa - Teljes megoldás

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi$. $\sin x = -1/2 \Rightarrow x = 7\pi/6 + 2k\pi$ vagy $x = 11\pi/6 + 2k\pi$. Mindenhol $k \in \mathbb{Z}$.

10.2. $\cos x(2\sin x + 1) = 0$ [R4-TRIG-04]

A szorzat 0, ha $\cos x = 0$ vagy $2\sin x + 1 = 0$.

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + k\pi$$

$$\sin x = -1/2 \Rightarrow x = 7\pi/6 + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad 11\pi/6 + 2k\pi$$

Gyakori hiba - Szorzat = 0

Nem szabad a két tényezőt egyszerre 0-nak követelni. Elég, ha bármelyik tényező 0; ezért „vagy” kapcsolat van.

11. Hibalista és pontosítások az eredeti kézírásos anyaghoz

A forrásfotók több helyen rövidítettek, áthúzottak vagy perspektivikusan torzák. Az alábbi lista azt rögzíti, milyen pontokat kell a tanulható változatban egyértelműen kezelni.

Gyakori hiba - Konvergencia definíció

A kvantorok sorrendje lényeges: $\forall \varepsilon > 0$ után $\exists N$, majd $\forall n \geq N$. N függhet ε -tól, de n -től már nem.

Gyakori hiba - Korlátosság

A „konvergens $\Rightarrow$ korlátos” igaz, de a fordított állítás hamis. Példa: $(-1)^n$ korlátos, mégsem konvergens.

Gyakori hiba - Monotonitás

A monoton + megfelelő oldali korlát együtt garantál konvergenciát; önmagában a monotonitás nem.

Gyakori hiba - Hányados határértéke

A nevező határértéke nem lehet 0 a közvetlen hányadosszabály alkalmazásához.

Gyakori hiba - Tangens

$\tan x = \sin x / \cos x$ csak $\cos x \neq 0$ mellett értelmezett.

Gyakori hiba - Radián

Analízisben fokjel nélkül a trigonometrikus argumentum radiánban értendő.

Gyakori hiba - ∞ jel

A $+\infty$ és $-\infty$ nem valós számok; a „határérték $= \infty$ ” külön, kiterjesztett értelemben vett állítás.

12. Megoldott feladatsor - fokozatos gyakorlás

12.1. Sorozat első tagjai

Példa - Feladat

$a_n = (2n-1)/(n+1)$. Írd ki az első négy tagot.

Megoldás menete:

$a_1=1/2$, $a_2=3/3=1$, $a_3=5/4$, $a_4=7/5$. A módszer: n helyére rendre 1,2,3,4 kerül.

12.2. Konvergencia sejtése

Példa - Feladat

$a_n = (5n+2)/(n+3)$. Mi lehet a határérték?

Megoldás menete:

Osszunk n -nel: $(5+2/n)/(1+3/n) \rightarrow 5$. A sejtett és tényleges határérték 5.

12.3. ε -N bizonyítás

Példa - Feladat

Bizonyítsd: $2/n \rightarrow 0$.

Megoldás menete:

$|2/n| < \varepsilon$ akkor teljesül, ha $n > 2/\varepsilon$. Választható $N(\varepsilon) = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 1$.

Ezt jegyezd meg - Mi a módszer lényege?

Ne a kész képletet próbáld megjegyezni. Először azonosítsd a típust, majd válaszd a hozzá illő eszközt: ε -N átalakítás, legmagasabb hatvánnyal osztás, becslés, vagy trigonometrikus alapmegoldás.

12.4. ε -N racionális

Példa - Feladat

Bizonyítsd: $(4n-1)/(n+2) \rightarrow 4$.

Megoldás menete:

$|(4n-1)/(n+2) - 4| = 9/(n+2)$. Elég $n > 9/\varepsilon - 2$. Például $N = \max\{1, \lfloor 9/\varepsilon - 2 \rfloor + 1\}$.

Ezt jegyezd meg - Mi a módszer lényege?

Ne a kész képletet próbáld megjegyezni. Először azonosítsd a típust, majd válaszd a hozzá illő eszközt: ε -N átalakítás, legmagasabb hatvánnyal osztás, becslés, vagy trigonometrikus

alapmegoldás.

12.5. Monotonitás

Példa - Feladat

Vizsgáld $a_n = 1 - 1/n$ monotonitását.

Megoldás menete:

$a_{n+1} - a_n = (1 - 1/(n+1)) - (1 - 1/n) = 1/n - 1/(n+1) = 1/[n(n+1)] > 0$, tehát szigorúan növekvő.

12.6. Korlátosság

Példa - Feladat

Korlátos-e $a_n = n/(n+1)$?

Megoldás menete:

Igen. $0 < a_n < 1$ minden $n \geq 1$ -re, tehát például $K=1$ abszolút korlát.

12.7. Racionális határérték

Példa - Feladat

$\lim (7n^2 + 2n - 1)/(3n^2 + 5)$.

Megoldás menete:

Osszunk n^2 -tel: $(7 + 2/n - 1/n^2)/(3 + 5/n^2) \rightarrow 7/3$.

Ezt jegyezd meg - Mi a módszer lényege?

Ne a kész képletet próbáld megjegyezni. Először azonosítsd a típust, majd válaszd a hozzá illő eszközt: ε -N átalakítás, legmagasabb hatvánnyal osztás, becslés, vagy trigonometrikus alapmegoldás.

12.8. Fokszámok

Példa - Feladat

$\lim (2n+1)/(n^2+4)$.

Megoldás menete:

Osszunk n^2 -tel: $(2/n + 1/n^2)/(1 + 4/n^2) \rightarrow 0$.

12.9. Geometriai

Példa - Feladat

$\lim (4^n + 2^n)/(4^n - 1)$.

Megoldás menete:

Osszunk 4^n -nel: $[1+(1/2)^n]/[1-1/4^n] \rightarrow 1$.

Ezt jegyezd meg - Mi a módszer lényege?

Ne a kész képletet próbáld megjegyezni. Először azonosítsd a típust, majd válaszd a hozzá illő eszközt: ε -N átalakítás, legmagasabb hatvánnyal osztás, becslés, vagy trigonometrikus alapmegoldás.

12.10. Rendőrelv

Példa - Feladat

Mutasd meg: $\cos n / n^2 \rightarrow 0$.

Megoldás menete:

$|\cos n / n^2| \leq 1/n^2 \rightarrow 0$, ezért a közrefogási tétel szerint a határérték 0.

12.11. Radiánváltás

Példa - Feladat

Alakítsd radiánba: 150° .

Megoldás menete:

$150^\circ \cdot \pi / 180^\circ = 5\pi/6$.

12.12. Nevezetes érték

Példa - Feladat

Számítsd ki $\sin(5\pi/6)$ és $\cos(5\pi/6)$ értékét.

Megoldás menete:

$5\pi/6 = \pi - \pi/6$. Ezért $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi/6) = 1/2$, $\cos(5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.

12.13. Trig egyenlet

Példa - Feladat

Oldd meg: $\sin x = \sqrt{3}/2$.

Megoldás menete:

Alapszög $\pi/3$. Megoldások: $x = \pi/3 + 2k\pi$ vagy $x = 2\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ezt jegyezd meg - Mi a módszer lényege?

Ne a kész képletet próbáld megjegyezni. Először azonosítsd a típust, majd válaszd a hozzá illő eszközt: ε -N átalakítás, legmagasabb hatvánnyal osztás, becslés, vagy trigonometrikus

alapmegoldás.

12.14. Trig faktorizálás

Példa - Feladat

Oldd meg: $2\sin x \cos x = 0$.

Megoldás menete:

Szorzat 0: $\sin x = 0$ vagy $\cos x = 0$. Egyesítve $x = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.15. Összetett határérték

Példa - Feladat

$\lim [(3n+1)/(n+2)] \cdot [(n-1)/n]$.

Megoldás menete:

Az első tényező $\rightarrow 3$, a második $\rightarrow 1$. Szorzatszabállyal a határérték 3.

13. Önálló feladatok - megoldás nélkül

Ezeket érdemes papíron megoldani. Ha elkészültél, a megoldásaidat később össze lehet vetni a definíciókkal és módszerekkel.

1. Írd ki $a_n = (n+2)/(2n+1)$ első öt tagját.
2. Sejtsd meg, majd számítsd ki $\lim (6n-1)/(2n+5)$.
3. Bizonyítsd ε -N definícióból, hogy $3/n \rightarrow 0$.
4. Bizonyítsd, hogy $1/n^3 \rightarrow 0$, és adj meg $N(\varepsilon)$ -t.
5. Vizsgáld az $a_n = n/(n+2)$ monotonitását és korlátosságát.
6. Korlátos-e $(-1)^n \cdot n$? Konvergens-e?
7. Számítsd ki $\lim (5n^2 - n + 7)/(2n^2 + 4n)$.
8. Számítsd ki $\lim (3n+1)/(n^2+1)$.
9. Számítsd ki $\lim (2^{n+1})/(5^{n+3})$.
10. Mutasd meg rendőrelvvel, hogy $\sin(2n)/n \rightarrow 0$.
11. Alakítsd radiánba: 15° , 120° , 225° , 330° .
12. Alakítsd fokba: $\pi/12$, $3\pi/4$, $7\pi/6$, $11\pi/6$.
13. Számítsd ki $\sin(7\pi/6)$, $\cos(7\pi/6)$, $\tan(7\pi/6)$.
14. Oldd meg: $\sin x = 1/2$.
15. Oldd meg: $\cos x = -\sqrt{2}/2$.
16. Oldd meg: $\tan x = 1$.
17. Oldd meg: $2\cos^2 x - 1 = 0$.
18. Oldd meg: $\sin x(2\cos x - 1) = 0$.
19. Egyszerűsítsd a $\sin^2 x + \cos^2 x$ azonosság felhasználásával: $1 - \sin^2 x$.
20. Döntsd el, igaz vagy hamis: minden korlátos sorozat konvergens. Indokold.
21. Döntsd el, igaz vagy hamis: minden konvergens sorozat korlátos. Indokold.
22. Döntsd el, igaz vagy hamis: minden monoton növekvő sorozat konvergens.
23. Adj példát korlátos, de nem konvergens sorozatra.
24. Adj példát monoton, de nem korlátos sorozatra.
25. Magyarázd el saját szavaiddal, mit jelent a $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ rész.
26. $\varepsilon = 0,02$ mellett keress megfelelő N-et az $a_n = 1/n$ sorozathoz.
27. $\varepsilon = 10^{-4}$ mellett keress megfelelő N-et az $a_n = 1/n^2$ sorozathoz.
28. Számítsd ki $\lim [(n+1)/(n+2)]^2$.
29. Számítsd ki $\lim (1 - 1/n)^n$, ha ismered a nevezetes határértéket.

30. Írj egy mondatot arról, mi a különbség a „határérték 0” és a „tag értéke 0” között.

14. Jegyzetkivonat az eredeti R-jelölésekkel

A korábbi reprodukciós képmelléklet helyett ez a fejezet gépelt, olvasható kivonatot ad. A cél nem a fotó külalakjának másolása, hanem az eredeti órai gondolatmenet visszakereshető megőrzése. A kódok ugyanazt a témarészt jelölik, mint a főszövegben.

Referencia	Olvasható tartalmi kivonat
R1-SOR-01	Sorozat mint függvény: $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Példák: $1/n, (-1)^n, (-1)^n/n$.
R1-KONV-01	Konvergencia: $a_n \rightarrow A$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz található N , amely után $ a_n - A < \varepsilon$.
R1-MON-01	Monotonitás: $a_n \leq a_{n+1}$ növekvő; $a_n \geq a_{n+1}$ csökkenő.
R1-KORL-01	Korlátosság: a tagok egy rögzített intervallumban maradnak.
R2-EN-01	ε -N példa $1/n$ illetve $1/n^2$ típusú sorozatokra; N az ε -ból számítható.
R2-EN-03	$(3n+1)/(n+2) \rightarrow 3$; a különbség $5/(n+2)$, ebből $N(\varepsilon)$ választható.
R2-HAT-01	Racionális sorozatok határértéke: a legmagasabb n -hatvánnyal osztás.
R3-TRIG-01	Fok-radián átváltás; $180^\circ = \pi$.
R3-TRIG-02	Egységkör: $P(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.
R3-TRIG-03	Nevezetes szögek: $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ és megfelelő radiánértékek.
R3-TRIG-04	Redukciós képletek és előjelek az egységkör alapján.
R4-TRIG-01	Trigonometriai azonosságok: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, összegképletek.
R4-TRIG-03	Másodfokú trigonometrikus egyenlet $y = \sin x$ helyettesítéssel.
R4-TRIG-04	Szorzáttá alakítás: $\cos x(2\sin x + 1) = 0$ típusú egyenlet.
R5-GEO-01	Geometriai sorozat q^n viselkedése $ q < 1$, $q = 1$, $ q > 1$ esetekben.
R6-MON-01	Monoton + megfelelő oldali korlát $\Rightarrow$ konvergencia.
R7-HAT-01	Határérték műveleti szabályok összegre,

R7-HAT-03

Rendőrelv: azonos határértékű alsó és felső
becslés közrefogja a vizsgált sorozatot.

15. Egyoldalas vizsga előtti emlékeztető

- Konvergenca: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: |a_n - A| < \varepsilon$.
- Konvergens sorozat mindig korlátos; korlátos sorozat nem feltétlenül konvergens.
- Monoton növekvő + felülről korlátos $\Rightarrow$ konvergens; csökkenő + alulról korlátos $\Rightarrow$ konvergens.
- Racionális n-kifejezésnél oszd a legmagasabb n-hatvánnyal.
- $|q| < 1$ esetén $q^n \rightarrow 0$.
- Rendőrelv: két azonos határértékű becslés közé szorítás.
- $180^\circ = \pi$ radián; az egységkör pontja $(\cos x, \sin x)$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Trigonometrikus egyenletnél az összes periódikus megoldást add meg, $k \in \mathbb{Z}$.

Ezt jegyezd meg - Ha elakadsz egy feladatban

1) Írd ki, mit jelentenek a jelek. 2) Azonosítsd a feladattípust. 3) Írd fel a használható definíciót vagy tételt. 4) Csak ezután számolj. Az analízisben a pontos fogalmazás a megoldás része.

16. Az előző órai jegyzetek teljes kiegészítése - mélymagyarázatok

Ez a fejezet az R1-R7 órai jegyzetekből azokat a részleteket építi vissza, amelyek a felzárkóztató törzsanyagban csak röviden vagy egyáltalán nem szerepeltek. Ugyanazt a szabályt követi: új jelölés csak magyarázattal jelenhet meg.

16.1. Felső és alsó korlát külön-külön [R1-KORL-01, R5-KORL-01, R6-KORL-01]

Mit jelent ez? - Nem ugyanaz a felső korlát és a maximum

Az M felső korlát azt jelenti, hogy minden $a_n \leq M$. Nem szükséges, hogy a sorozat valamelyik tagja pontosan M legyen. Például $a_n = n/(n+1)$ minden tagja 1-nél kisebb, mégis 1 felső korlát.

felülről korlátos: $\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq M$

alulról korlátos: $\exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: m \leq a_n$

Jelmagyarázat - A jelölések

M : egy felső korlát • m : egy alsó korlát • $\exists$: létezik • $\forall n$: minden sorozatindexre

Példa - $a_n = 1/n$

$M=1$ felső korlát, mert $1/n \leq 1$. $m=0$ alsó korlát, mert $1/n > 0$. A 0 nem tagja a sorozatnak, mégis alsó korlát.

16.2. A konvergens sorozat korlátos - és miért nem igaz fordítva?

Ezt jegyezd meg - Egyirányú következmény

Ha $a_n \rightarrow A$, akkor (a_n) korlátos. Intuitívan: a sorozat farka A közelében marad, az első véges sok tag pedig szintén befogható egy elég nagy korlátba.

Gyakori hiba - A megfordítás hamis

Korlátos $\Rightarrow$ konvergens NEM igaz. A $(-1)^n$ csak -1 és 1 között mozog, mégis örökké váltakozik, ezért nincs egyetlen határértéke.

16.3. Abszolútérték és távolság - miért ilyen fontos?

$$|x| = x, \text{ ha } x \geq 0; \quad |x| = -x, \text{ ha } x < 0$$

Mit jelent ez? - Geometriai értelmezés

$|x-A|$ az x és A pont távolsága a számegyenesen. Ezért a $|a_n-A|<\varepsilon$ mondat pontosan azt jelenti, hogy a_n az A körüli ε sugarú környezetben van.

$$|a_n-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$$

Gyakori hiba - Az abszolútérték nem zárójel

$|-3|=3$. Ha abszolútértékes egyenlőtlenséget bontasz fel, mindkét oldali távolságot figyelembe kell venni.

16.4. Egészrész, plafon és N választása

$$\lfloor x \rfloor = x \text{ alsó egészrésze, } \lceil x \rceil = x \text{ felső egészrésze}$$

Példa - $x=4,7$

$\lfloor 4,7 \rfloor = 4$, míg $\lceil 4,7 \rceil = 5$. Ha $n > 4,7$ feltételt kell garantálnunk, $N=5$ jó. Ezért kényelmes az $N=\lfloor \text{küszöb} \rfloor + 1$ választás.

Gyakori hiba - Szigorú és nem szigorú egyenlőtlenség

Ha $n > 10$ kell, $N=10$ nem elég, mert $n=N=10$ megengedett lenne. Ilyenkor $N=11$ biztos választás.

16.5. Határérték-műveletek teljesebb listája [R7-HAT-01]

$$a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B \Rightarrow a_n - b_n \rightarrow A - B$$

$$a_n \rightarrow A \Rightarrow |a_n| \rightarrow |A|$$

$$c \cdot a_n \rightarrow cA \quad (c \text{ rögzített valós szám})$$

Jelmagyarázat - A jelölések

c : rögzített konstans, nem függ n -től • $|A|$: A abszolútértéke • $A-B$: a két határérték különbsége

Példa - Abszolútérték

Ha $a_n = (-1)^n/n$, akkor $a_n \rightarrow 0$, és $|a_n| = 1/n \rightarrow 0 = |0|$. A szabály azonban nem jelenti azt, hogy az abszolútérték 'elhagyható' tetszőleges algebrai lépésben.

16.6. Racionális sorozatok: három fokszám-eset [R2-HAT-01, R7-HAT-02]

Mit jelent ez? - Fokszám

A polinom fokszáma a legnagyobb kitevő. Például $3n^2 - 5n + 1$ fokszáma 2. Nagy n mellett a legmagasabb hatvány dominál.

azonos fok: $(a n^k + \dots) / (b n^k + \dots) \rightarrow a/b$ számláló kisebb fokú $\rightarrow 0$ számláló nagyobb fokú $\rightarrow$ tipikusan $\pm\infty$, előjelvizsgálattal**Példa - n^3 a számlálóban**

$(n^3+1)/(2n^2+3) = (n+1/n^2)/(2+3/n^2)$. A számláló n miatt korlátlanul nő, a nevező 2-höz tart, ezért az egész $+\infty$ -hez tart.

16.7. Geometriai sorozat negatív q esetén [R5-GEO-01, R6-GEO-01]**Mit jelent ez? - Miért számít $|q|$?**

A $|q|$ a tagok nagyságának változását, q előjele pedig az előjelváltást szabályozza. Ha $-1 < q < 0$, a tagok váltakoznak, de nagyságuk 0-hoz csökken, tehát mégis konvergálnak 0-hoz.

$$-1 < q < 0 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$$

$$q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n: \text{nincs határérték}$$

$$q < -1 \Rightarrow |q^n| \rightarrow \infty \text{ és az előjel váltakozik}$$

Példa - $q = -1/2$

A tagok: $-1/2, 1/4, -1/8, 1/16, \dots$ Az előjel váltakozik, de a távolság 0-tól feleződik, ezért a határérték 0.

16.8. Trigonometria: a nevezetes értékek teljes táblája [R3-TRIG-03]

szög	0	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
tan	0	1/√3	1	√3

Mit jelent ez? - Honnan jönnek ezek?

A 30° és 60° értékek egy szabályos háromszög felezéséből, a 45° értékek egy egyenlő szárú derékszögű háromszögből vezethetők le. Nem szükséges vakon memorizálni: az egységkörrel és ezekkel a háromszögekkel újra előállíthatók.

16.9. Redukciós képletek teljesebb rendszere [R3-TRIG-04]

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x, \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

Mit jelent ez? - Ne képlethalmazként tanuld

Először keresd meg az egységgörön, melyik negyedbe kerül a szög. Ez megadja az előjelet. Utána nézd meg, hogy a tengelyek felcserélődnek-e; $\pi/2$ -es eltolásnál a sin és cos szerepe gyakran cserélődik.

16.10. Szinusz- és koszinuszegyenletek általános alakja [R3-TRIG-05]

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ vagy } x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + 2k\pi$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

Jelmagyarázat - A jelölések

α : egy ismert referenciaszög • k : tetszőleges egész szám • $\pm\alpha$: α vagy $-\alpha$ • 2π : sin és cos periódusa • π : tan periódusa

Példa - $\cos x = -\sqrt{2}/2$

Az egységgörön ez $3\pi/4$ és $5\pi/4$. Írható $x = 3\pi/4 + 2k\pi$ vagy $x = 5\pi/4 + 2k\pi$. A $\pm\alpha$ alak akkor a legkényelmesebb, ha már van egy α , amelyre $\cos \alpha$ a kívánt érték.

17. Az előző jegyzet megoldott feladatai - kibővített magyarázattal

17.1. Váltakozó, de konvergens

Példa - Feladat

$a_n = (-1)^n/n$. Döntsd el a konvergenciát.

Megoldás: A $(-1)^n$ csak az előjelet váltja, a nagyság $1/n$. Mivel $|a_n| = 1/n \rightarrow 0$, ezért $-1/n \leq a_n \leq 1/n$. Mindkét szélső sorozat 0-hoz tart, tehát rendőrelvvel $a_n \rightarrow 0$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

A váltakozás önmagában nem zárja ki a konvergenciát. Az számít, hogy az amplitúdó csökken-e 0-hoz.

17.2. ϵ -N eltolással

Példa - Feladat

Bizonyítsd: $(5n-2)/(n+3) \rightarrow 5$.

Megoldás: $|(5n-2)/(n+3) - 5| = 17/(n+3)$. A $17/(n+3) < \epsilon$ feltételből $n > 17/\epsilon - 3$. Választható $N = \max\{1, \lfloor 17/\epsilon - 3 \rfloor + 1\}$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

Az „eltolás” azt jelenti, hogy n helyett $n+3$ van a nevezőben; emiatt a küszöbből 3-at levonunk.

17.3. Csökkenő sorozat

Példa - Feladat

Vizsgáld $a_n = 1/n$ monotonitását.

Megoldás: $a_{n+1} - a_n = 1/(n+1) - 1/n = -1/[n(n+1)] < 0$, ezért szigorúan csökkenő. Emellett $a_n > 0$, tehát alulról korlátos; ezért konvergens, és a határértéke 0.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

A különbség előjele gyors monotonitási teszt.

17.4. Exponenciális hányados

Példa - Feladat

$$\lim (5^n + 2^n) / (5^n - 3^n).$$

Megoldás: Osszuk 5^n -nel: $[1 + (2/5)^n] / [1 - (3/5)^n]$. Mivel $|2/5| < 1$ és $|3/5| < 1$, mindkét hatvány 0-hoz tart, így a határérték 1.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

Exponenciális összegekben gyakran a legnagyobb alap hatványával érdemes osztani.

17.5. Pontos trigonometriai érték

Példa - Feladat

Számítsd ki $\sin 75^\circ$ -ot.

Megoldás: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Az összegképlet szerint $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

A „pontos” eredmény gyökös alak; nem kell tizedesre kerekíteni.

17.6. Koszinusz-egyenlet

Példa - Feladat

Oldd meg: $\cos x = -\sqrt{2}/2$.

Megoldás: A referenciaszög $\pi/4$. A koszinusz negatív a II. és III. negyedben, ezért $x = 3\pi/4 + 2k\pi$ vagy $5\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

Először referenciaszög, utána előjel alapján negyed.

17.7. Tangens-egyenlet

Példa - Feladat

Oldd meg: $\tan x = 1$.

Megoldás: $\tan(\pi/4) = 1$. A tangens periódusa π , ezért $x = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

A tangensnél nem 2π , hanem π a periódus.

17.8. Másodfokú sin x-ben**Példa - Feladat**

Oldd meg: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Megoldás: Legyen $y = \sin x$. Ekkor $(2y-1)(y-1)=0$, tehát $y=1/2$ vagy $y=1$. Vissza: $\sin x = 1/2 \Rightarrow x = \pi/6 + 2k\pi$ vagy $5\pi/6 + 2k\pi$; $\sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

A segédváltozó csak átmeneti: a végén mindig vissza kell térni x -hez.

17.9. Vegyes minősítés**Példa - Feladat**

$a_n = (-2)^n$. Konvergens? Korlátos? Monoton?

Megoldás: Nem korlátos, mert $|a_n| = 2^n \rightarrow \infty$. Nem konvergens. Nem monoton, mert az előjel minden lépésben vált.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

Három külön tulajdonságról van szó; mindegyiket külön indokoljuk.

17.10. Monoton konvergencia tétellel**Példa - Feladat**

$a_n = 1 - 1/n$. Bizonyítsd a konvergenciát.

Megoldás: $a_{n+1} - a_n = 1/[n(n+1)] > 0$, tehát növekvő. Minden n -re $a_n < 1$, tehát felülről korlátos. A monoton konvergencia tétel miatt konvergens. Közvetlenül $\lim a_n = 1$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

A tétel a konvergencia létezését adja; a konkrét határértéket külön is kiszámolhatjuk.

17.11. Redukció levezetése**Példa - Feladat**

Mutasd meg: $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.

Megoldás: A különbségképlet: $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. $a = \pi/2$, $b = x$: $\cos(\pi/2) \cos x + \sin(\pi/2) \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$.

Ezt jegyezd meg - Módszertani tanulság

A redukciós képletek nagy része az összeg- és különbségképletekből levezethető.

18. R1-R7 referencia-térkép - mit hol találsz az egyesített jegyzetben?

Forráskód	Téma	Az R5-ben részletesen
R1-SOR-01/02	sorozat, megadási módok	1. fejezet + 0. jelölési alapok
R1-KONV-01, R1-EN-01/02	konvergencia, ε -N	2-3. fejezet + 16.3-16.4
R1/R5/R6-KORL	korlátosság	4. fejezet + 16.1-16.2
R1/R6-MON	monotonitás	4. fejezet + 17.3, 17.10
R2/R7-HAT	határérték-számítás	5-6. fejezet + 16.5-16.6
R5/R6-GEO	geometriai sorozat	7. fejezet + 16.7
R3-TRIG-01..05	radián, egységkör, redukció	8-9. fejezet + 16.8-16.10
R4-TRIG-01..04	azonosságok, egyenletek	9-10. fejezet + 17.5-17.8

Ezt jegyezd meg - Miért van két helyen ugyanaz a téma?

A törzsfejezetek a nulláról tanulható tananyagot adják. A 16-18. fejezet az előző órai jegyzetekkel való teljes megfeleltetést és a korábban kimaradt finom részleteket tartalmazza. Így semmi nem vész el az eredeti anyagból, de a tanulási sorrend továbbra is követhető.