

ANALÍZIS I.

120 vizsgafeladat

Feladatsor + részletes, matematikailag tördelt megoldókulcs

Verzió: AN1-20260912-V2 | Kapcsolódó jegyzet: AN1-20260912-R5

Használat. A feladatok az eddig feldolgozott sorozat-, határérték- és trigonometria-anyagra épülnek. A nehézség jelölése: * alapozó, ** tipikus vizsgaszint, *** összetettebb. A V2 kiadásban a matematikai kifejezések valódi törtvonallal, alsó/felső indexekkel, gyökjelekkel és többsoros levezetésekkel szerepelnek. Nincs oldalszám-cél: az olvashatóság elsődleges.

I. FELADATOK

A. Jelölések és alapfogalmak

1. Indexek olvasása

Legyen

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1}.$$

Számítsd ki a_1 , a_4 és a_{10} értékét, és mondd el egy mondatban, mit jelent az alsó n index.

2. Kvantorok magyarul

Fordítsd hétköznapi magyarra:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon.$$

3. Abszolútérték

Oldd meg:

$$|x - 3| < 0,7.$$

4. Epsilon-környezet

Írd intervallum alakban az $A = -2$ szám $\varepsilon = 0,15$ sugarú környezetét.

5. Egészrész

Számítsd ki:

$$[7,9], \quad [-1,2], \quad [7,1].$$

6. Hatvány és index

Magyarázd meg a különbséget az

$$a_n^2, \quad a_{n^2}, \quad (a_n)^n$$

jelölések között.

7. Sigma jel

Írd ki tagonként:

$$\sum_{k=1}^5 k^2.$$

8. Delta jel

Ha x értéke 2,4-ről 2,9-re változik, mennyi

$$\Delta x = x_{\text{új}} - x_{\text{régi}}?$$

*

9. Állítás megfordítása

Igaz-e: ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens? Adj ellenpéldát.

**

10. Végtelen jel

Magyarázd meg, miért nem kezelhető a $+\infty$ közönséges valós számként.

**

B. Sorozatok alapjai

11. Explicit sorozat

$$a_n = \frac{3n-2}{n+2}.$$

Írd ki az első öt tagot.

*

12. Rekurzív sorozat

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{2}.$$

Számítsd ki a_2, a_3, a_4 értékét.

*

13. Váltakozó sorozat

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Írd ki az első hat tagot és írd le a mintázatot.

*

14. Egyszerű becslés

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Mutasd meg közvetlenül, hogy $0 < a_n < 1$.

**

15. Határérték sejtése

$$a_n = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Sejtsd meg a határértéket az első néhány tag és algebra alapján.

*

16. Oszcilláció

$$a_n = 2 + (-1)^n.$$

Konvergens-e?

**

17. Gyökös sorozat

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Konvergens-e, és mi a határértéke?

*

18. **Numerikus intuíció**

*

$$a_n = \frac{n-5}{n+5}.$$

Számítsd ki a_5 és a_{100} értékét; mit sugall ez?

19. **Exponenciális növekedés**

*

$$a_n = 3^n.$$

Korlátos-e?

20. **Negatív geometriai**

**

$$a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Mi történik az előjellel és a nagysággal?

21. **Átalakítás**

**

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Írd át 1 – valami alakba, és ebből sejtse meg a határértéket.

22. **Racionális sorozat**

*

$$a_n = \frac{2n+1}{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Melyik számhoz közelít?

23. **Becslés**

**

$$a_n = \frac{\sin n}{n}.$$

Miért nem kell ismerni $\sin n$ pontos mintázatát a határértékhez?

24. **Monotonitás**

**

$$a_n = \frac{n}{n+2}.$$

Hasonlítsd össze a_n -et és a_{n+1} -et.

25. **Egyoldali közelítés**

*

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Milyen irányból közelíti az 1-et?

C. ε - N bizonyítások

26. Bizonyítsd definícióból: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

**

27. Bizonyítsd definícióból: $a_n = \frac{2}{n} \rightarrow 0$.

**

28. Bizonyítsd definícióból: $a_n = \frac{5}{n} \rightarrow 0$.

**

29. Adj explicit $N(\varepsilon)$ -t: $a_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$. **
30. Adj explicit $N(\varepsilon)$ -t: $a_n = \frac{3}{n^2} \rightarrow 0$. **
31. Bizonyítsd definícióból:

$$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1.$$
 **
32. Bizonyítsd definícióból:

$$\frac{2n-1}{n} \rightarrow 2.$$
 **
33. Bizonyítsd definícióból:

$$\frac{3n+2}{n+1} \rightarrow 3.$$

34. Bizonyítsd definícióból:

$$\frac{4n-3}{n+2} \rightarrow 4.$$

35. Bizonyítsd definícióból:

$$\frac{7n+1}{2n+3} \rightarrow \frac{7}{2}.$$

36. $a_n = 1/n$ esetén $\varepsilon = 0,03$. Add meg a legkisebb megfelelő N -et. **
37. $a_n = 1/n^2$ esetén $\varepsilon = 0,0025$. Add meg a legkisebb megfelelő N -et. **
38. Valaki $1/n \rightarrow 0$ bizonyításában $N = 1/\varepsilon$ -t választ. Mi a gond, és hogyan javítanád? **
39. A definícióban függhet-e N az n -től? Függhet-e ε -tól? **
40. Írd át kettős egyenlőtlenséggé:

$$|a_n - 5| < \varepsilon.$$
 *
41. Fogalmazd meg intuitívan és kvantorokkal is, mit jelent, hogy a_n nem tart A -hoz. ***

D. Korlátosság és monotonitás

42. Mutasd meg, hogy $a_n = \frac{1}{n}$ csökkenő és alulról korlátos. **
43. Mutasd meg, hogy $a_n = \frac{n}{n+1}$ növekvő és felülről korlátos. **
44. Vizsgáld $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ monotonitását és korlátosságát. **
45. $a_n = (-1)^n$: korlátos? monoton? konvergens? *
46. $a_n = n$: korlátos? monoton? konvergens valós számhoz? *
47. $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$: korlátos? konvergens? **

48. $a_n = \frac{n+3}{n+1}$: növekvő vagy csökkenő? **
49. $a_n = \frac{n^2}{n^2+4}$: mutasd meg, hogy 1 felső korlát. *
50. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$: korlátos-e? Mi a határértéke? ***
51. $a_n = (-2)^n$: korlátos? monoton? *
52. Az $a_n = \frac{n}{n+1}$ sorozatnak van-e maximuma? 1 felső korlát-e? **
53. Az $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ sorozatnak van-e minimuma? ***
54. Melyik két tulajdonság elegendő egy növekvő sorozat konvergenciájához? *
55. Adj monoton, de nem konvergens valós sorozatot. *
56. Adj korlátos, de nem monoton és nem konvergens sorozatot. *

E. Határérték-számítás

57. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n-3}$ **
58. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^2+4}$ **
59. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+7}{n^2+1}$ **
60. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{3n+2}$ **
61. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3-n}{2n^3+5}$ **
62. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-9}{n^2+3n}$ **
63. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}$ **
64. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$ **
65. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}$ **
66. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{5n^2-n+4}$ **
67. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1}$ **
68. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^2$ **
69. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{2}{n}\right)$ **
70. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n}$ **

71. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n+1}}{\frac{5n-2}{n+3}}$ **
72. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$ **
73. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n}$ **
74. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ ***
75. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 3n}}$ **
76. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ***
77. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2}$ **
78. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos n}{n}$ **
79. Miért nem mondhatjuk pusztán az ∞/∞ alakból, hogy a hányados határértéke 1? **
80. Adj két $0/0$ alakú sorozatkifejezést, amelyek határértéke különböző. **
81. Ha $a_n \rightarrow -2$, mennyi $5a_n - 3$ határértéke? *

F. Geometriai és exponenciális sorozatok

82. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **
83. $a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$ **
84. $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ **
85. $a_n = (-1)^n$ **
86. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{5^n + 3^n}$ **
87. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^n + 2^n}$ **
88. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n}$ **
89. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^n}{4^n - 3^n}$ **
90. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ **
91. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ **
92. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n}$ **

93. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ **
94. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ **
95. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n}$ **
96. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ **

G. Trigonometria

97. Alakítsd radiánba: 210° . *
98. Alakítsd fokba: $\frac{5\pi}{4}$. *
99. Számítsd ki:
 $\sin \frac{\pi}{6}, \quad \cos \frac{\pi}{3}, \quad \tan \frac{\pi}{4}$. *
100. Milyen előjelű $\sin x$ és $\cos x$ a III. negyedben? *
101. Egyszerűsítsd: $\sin(\pi - x)$. *
102. Egyszerűsítsd: $\cos(\pi + x)$. *
103. Egyszerűsítsd: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. *
104. Ha $\sin x = \frac{3}{5}$ és x az I. negyedben van, mennyi $\cos x$? **
105. Ha $\cos x = -\frac{5}{13}$ és x a II. negyedben van, mennyi $\sin x$? **
106. Oldd meg: $\sin x = 0$. *
107. Oldd meg: $\cos x = 0$. *
108. Oldd meg: $\tan x = \sqrt{3}$. **
109. Oldd meg: $\sin x = \frac{1}{2}$. **
110. Oldd meg: $\cos x = -\frac{1}{2}$. **
111. Oldd meg:
 $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. ** *
112. Oldd meg:
 $\cos x (2 \sin x - 1) = 0$. ** *
113. Számítsd ki pontosan $\sin 15^\circ$ értékét. ** *
114. Számítsd ki pontosan $\cos 75^\circ$ értékét. ** *
115. Mi a $\sin$, $\cos$ és $\tan$ alapperiódusa? *
116. Mely x -eknél nem értelmezett $\tan x$? **

H. Vegyes vizsgaszintű feladatok

117. Vizsgáld a

$$a_n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

sorozat konvergenciáját és add meg a határértékét.

* * *

118. Legyen

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}.$$

Döntsd el, monoton-e, korlátos-e, és számítsd ki a határértékét.

* * *

119. Az

$$a_n = \frac{3n+1}{n+2}$$

sorozatnál határozd meg, milyen N után garantált

$$|a_n - 3| < 10^{-3}.$$

* * *

120. Számítsd ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^4}{3^n + 2n^4}.$$

* * *

II. RÉSZLETES MEGOLDÓKULCS

A. Jelölések és alapfogalmak

1.
$$a_1 = \frac{5}{2}, \quad a_4 = \frac{11}{5}, \quad a_{10} = \frac{23}{11}.$$

Az n a sorozattag sorszám; a_n az n -edik tag.
2. Bármilyen pozitív ε hibahatárt választunk, található olyan N sorszám, amelytől kezdve minden $n \geq N$ indexre
$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Vagyis a sorozat farka teljesen az A körüli ε -környezetben marad.
3.
$$|x - 3| < 0,7 \iff -0,7 < x - 3 < 0,7 \iff 2,3 < x < 3,7.$$
4.
$$(A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (-2 - 0,15, -2 + 0,15) = (-2,15, -1,85).$$
5.
$$\lfloor 7,9 \rfloor = 7, \quad \lfloor -1,2 \rfloor = -2, \quad \lceil 7,1 \rceil = 8.$$

Negatív számnál is az alsó egészrész a számnál nem nagyobb legnagyobb egész.
6.
$$a_n^2 = (a_n)^2$$

az n -edik tag négyzete;
$$a_{n^2}$$

a sorozat n^2 -edik tagja; míg
$$(a_n)^n$$

az n -edik tag n -edik hatványa.
7.
$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

A Σ nagy szigma összegzést, k pedig futóindexet jelent.
8.
$$\Delta x = x_{\text{új}} - x_{\text{régi}} = 2,9 - 2,4 = 0,5.$$
9. Nem. Ellenpélda:
$$a_n = (-1)^n.$$

Ekkor $|a_n| = 1$, tehát a sorozat korlátos, viszont a tagok -1 és 1 között váltakoznak, ezért nem konvergál.
10. $+\infty$ nem eleme $\mathbb{R}$ -nek; a korlátlan növekedést jelöli. Emiatt az olyan alakok, mint
$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

nem közönséges számolási műveletek, hanem határozatlan alakok lehetnek.

B. Sorozatok alapjai

11.
$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{7}{5}, \quad a_4 = \frac{5}{3}, \quad a_5 = \frac{13}{7}.$$

12.
$$a_2 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad a_3 = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}, \quad a_4 = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{15}{4}.$$

13.
$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}.$$

Az előjel váltakozik, miközben az abszolútérték $1/n$ szerint csökken 0-hoz.

14. $n > 0$ és $n < n+1$, ezért pozitív nevezővel osztva

$$0 < \frac{n}{n+1} < 1.$$

15.
$$\frac{n+1}{2n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

16. Páros n esetén $a_n = 3$, páratlan n esetén $a_n = 1$. A két részsorozat különböző határértékhez tart, ezért az eredeti sorozat nem konvergens.

17.
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

mert $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$.

18.
$$a_5 = 0, \quad a_{100} = \frac{95}{105} = \frac{19}{21} \approx 0,905.$$

Az algebrai alak alapján a határérték 1.

19.
$$3^n \rightarrow +\infty,$$

tehát a sorozat felülről nem korlátos.

20. Az előjel váltakozik, de

$$|a_n| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0,$$

így $a_n \rightarrow 0$.

21.
$$\frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1} \rightarrow 1.$$

22.
$$\frac{2n+1}{n-1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \rightarrow 2.$$

Mivel $|\sin n| \leq 1$,

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

A rendőrelv miatt

$$\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0.$$

23.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

Tehát a sorozat szigorúan növekvő.

24.

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} > 1, \quad \frac{1}{n} \downarrow 0.$$

Ezért a sorozat felülről közelíti az 1-et.

25.

C. ε - N bizonyítások

Legyen $\varepsilon > 0$. Azt szeretnénk, hogy

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ez ekvivalens azzal, hogy

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ezért választhatjuk

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Ha $n \geq N(\varepsilon)$, akkor $n > 1/\varepsilon$, tehát $1/n < \varepsilon$. Így $1/n \rightarrow 0$.

26.

$$\left| \frac{2}{n} \right| < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Válasszuk

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Ekkor minden $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|2/n| < \varepsilon$.

27.

$$\left| \frac{5}{n} \right| < \varepsilon \iff n > \frac{5}{\varepsilon},$$

ezért jó választás

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

28.

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Így például

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1.$$

29.

$$\frac{3}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{3}{\varepsilon} \iff n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Tehát

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$$

megfelelő.

30.

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Innen ugyanúgy

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

31.

$$\left| \frac{2n-1}{n} - 2 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ezért

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

32.

$$\left| \frac{3n+2}{n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n+2-3n-3}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Elég, ha

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Például

$$N(\varepsilon) = \max \left\{ 1, \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \right\}$$

megfelelő.

33.

$$\left| \frac{4n-3}{n+2} - 4 \right| = \left| \frac{-11}{n+2} \right| = \frac{11}{n+2}.$$

A kívánt feltétel:

$$\frac{11}{n+2} < \varepsilon \iff n > \frac{11}{\varepsilon} - 2.$$

Választható

$$N(\varepsilon) = \max \left\{ 1, \left\lfloor \frac{11}{\varepsilon} - 2 \right\rfloor + 1 \right\}.$$

34.

$$\left| \frac{7n+1}{2n+3} - \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{2(7n+1) - 7(2n+3)}{2(2n+3)} \right| = \frac{19}{4n+6}.$$

Kell:

$$\frac{19}{4n+6} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{4} \left(\frac{19}{\varepsilon} - 6 \right).$$

Ennél nagyobb természetes N megfelelő.

35.

$$\frac{1}{n} < 0,03 \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,03} = 33,333 \dots$$

A legkisebb megfelelő természetes szám:

$$N = 34.$$

36.

$$\frac{1}{n^2} < 0,0025 = \frac{1}{400} \Leftrightarrow n^2 > 400 \Leftrightarrow n > 20.$$

Ezért

$$N = 21.$$

37.

N -nek természetes számnak kell lennie, $1/\varepsilon$ viszont nem feltétlenül egész. Ráadásul a szigorú

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

feltételt kell biztosítani. Biztos választás:

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

38.

N függhet ε -től, ezért írhatjuk $N(\varepsilon)$ -nak. Miután ε rögzített, N is rögzített; nem választhatjuk újra minden n -hez.

39.

$$|a_n - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - 5 < \varepsilon \Leftrightarrow 5 - \varepsilon < a_n < 5 + \varepsilon.$$

40.

A tagadás:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - A| \geq \varepsilon_0.$$

Intuitívan: van egy rögzített pozitív távolság A körül, amelyből a sorozat akármilyen messzire megyünk is, újra és újra kilép.

41.

D. Korlátosság és monotonitás

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n,$$

tehát csökkenő. Továbbá $a_n > 0$, így 0 alsó korlát.

42.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Tehát növekvő, és

$$0 < \frac{n}{n+1} < 1,$$

így 1 felső korlát.

43.

$$a_{n+1} - a_n = \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Növekvő. Továbbá

$$1 \leq a_n < 2,$$

így korlátos, és $a_n \rightarrow 2$.

44.

$|a_n| = 1$, tehát korlátos. Nem monoton, mert az előjel váltakozik. Nem konvergens.

45.

$a_n = n$ szigorúan növekvő és alulról korlátos, de felülről nem korlátos:

$$n \rightarrow +\infty.$$

Nincs véges valós határértéke.

46.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

ezért

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 1.$$

Konvergens sorozatként korlátos is.

47.

$$a_n = \frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}.$$

A $2/(n+1)$ csökken, ezért a_n is csökken, és $a_n \rightarrow 1$.

48.

$$0 < n^2 < n^2 + 4$$

miatt

$$0 < \frac{n^2}{n^2 + 4} < 1.$$

Tehát 1 felső korlát.

49.

Racionalizálunk:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ez pozitív, és

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Tehát korlátos és 0-hoz tart.

50.

$|a_n| = 2^n \rightarrow \infty$, ezért nem korlátos. Az előjel váltakozik, ezért nem monoton.

51.

$$\frac{n}{n+1} < 1$$

minden n -re, tehát 1 felső korlát. Egyetlen tag sem egyenlő 1-gyel, ezért nincs maximum.

52.

Minden tag > 1 , de

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Ezért nincs legkisebb tag, vagyis nincs minimum. Az infimum 1.

53.

Monoton növekedés és felülről korlátosság. Csökkenő sorozatnál monoton csökkenés és alulról korlátosság.

54.

Például

$$a_n = n.$$

Monoton növekvő, de $+\infty$ -hez tart, ezért nincs véges valós határértéke.

55.

Például

$$a_n = (-1)^n.$$

Korlátos, de nem monoton és nem konvergens.

56.

E. Határérték-számítás

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n}} = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

57.

$$\frac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 4} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \rightarrow \boxed{3}.$$

58.

$$\frac{2n+7}{n^2+1} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \boxed{0}.$$

59.

$$\frac{n^2+1}{3n+2} = n \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n}} \rightarrow +\infty.$$

60.

$$\frac{4n^3 - n}{2n^3 + 5} = \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^3}} \rightarrow \boxed{2}.$$

61.

$$\frac{n^2 - 9}{n^2 + 3n} = \frac{1 - \frac{9}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow \boxed{1}.$$

62.

$$\frac{7 - \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \rightarrow \boxed{\frac{7}{3}}.$$

63.

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \boxed{0}.$$

64.

65.
$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \boxed{1}.$$
66.
$$\frac{2n^2 + 3n}{5n^2 - n + 4} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{5 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}} \rightarrow \boxed{\frac{2}{5}}.$$
67.
$$\frac{n^3 + 2}{n^2 + 1} = n \frac{1 + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow +\infty.$$
68.
$$\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2 \rightarrow 1^2 = \boxed{1}.$$
69.
$$\frac{n-1}{n+1} + \frac{2}{n} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2}{n} \rightarrow 1 + 0 = \boxed{1}.$$
70.
$$\frac{3n+1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \rightarrow 3 \cdot 1 = \boxed{3}.$$
71.
$$\frac{\frac{2n+1}{n+1}}{\frac{5n-2}{n+3}} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{n+3}{5n-2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$
72. Mivel $n > 0$,

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \boxed{1}.$$
73.
$$\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n} = \sqrt{4 + \frac{1}{n}} \rightarrow \boxed{2}.$$
74. Racionalizálunk:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}.$$

 n -nel osztva:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$
75.
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+3n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}}} \rightarrow \boxed{1}.$$
76.
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow \boxed{0}.$$

77.

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Rendőrelvvel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0.$$

78.

Mivel $-1 \leq \cos n \leq 1$,

$$1 \leq 2 + \cos n \leq 3.$$

Ezért

$$0 \leq \frac{2 + \cos n}{n} \leq \frac{3}{n} \rightarrow 0,$$

tehát a határérték $\boxed{0}$.

79.

Az ∞/∞ alak önmagában nem dönt:

$$\frac{n}{n} \rightarrow 1, \quad \frac{n^2}{n} = n \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

A növekedési ütemet kell összehasonlítani.

80.

Mindkét példa $0/0$ alakú:

$$\frac{1/n}{1/n} = 1, \quad \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Tehát a forma nem határozza meg a határértéket.

81.

A lineáris műveleti szabályok szerint

$$5a_n - 3 \rightarrow 5(-2) - 3 = \boxed{-13}.$$

F. Geometriai és exponenciális sorozatok

82.

$$\left| \frac{2}{3} \right| < 1 \implies \left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow \boxed{0}.$$

83.

$$\left| -\frac{3}{4} \right| < 1,$$

ezért az előjel váltakozik, de a nagyság 0-hoz tart:

$$\left(-\frac{3}{4} \right)^n \rightarrow \boxed{0}.$$

84.

$$\frac{5}{4} > 1 \implies \left(\frac{5}{4} \right)^n \rightarrow +\infty.$$

85.

$(-1)^n$ felváltva -1 és 1 , ezért nincs határértéke.

86.
$$\frac{3^n}{5^n + 3^n} = \frac{(3/5)^n}{1 + (3/5)^n} \rightarrow \boxed{0}.$$

87.
$$\frac{5^n}{5^n + 2^n} = \frac{1}{1 + (2/5)^n} \rightarrow \boxed{1}.$$

88.
$$\frac{2^n + 3^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \rightarrow \boxed{1}.$$

89.
$$\frac{4^n + 2^n}{4^n - 3^n} = \frac{1 + (1/2)^n}{1 - (3/4)^n} \rightarrow \boxed{1}.$$

90. A nevezetes határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

91.
$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n/2}\right]^2 \rightarrow \boxed{e^2}.$$

Tegyük $m = 3n$. Ekkor

$$\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^2 \rightarrow \boxed{e^2}.$$

A standard általánosítás szerint

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \boxed{e^{-1}}.$$

Írjuk:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \rightarrow \frac{e}{1} = \boxed{e}.$$

95.
$$\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n/5}\right]^{10} \rightarrow \boxed{e^{10}}.$$

Vegyük a logaritmust:

$$\ln a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Mivel $\ln(1+x) \sim x$ ha $x \rightarrow 0$,

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Ezért

$$a_n \rightarrow e^0 = \boxed{1}.$$

96.

G. Trigonometria

$$210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \boxed{\frac{7\pi}{6}}.$$

97.

$$\frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \boxed{225^\circ}.$$

98.

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

99.

A III. negyedben

$$\sin x < 0, \quad \cos x < 0,$$

ezért $\tan x > 0$.

100.

$$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin x}.$$

101.

$$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos x}.$$

102.

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}.$$

103.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

miatt

$$\cos x = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Az I. negyed miatt a pozitív gyök kell.

104.

$$\sin x = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}.$$

A II. negyedben a szinusz pozitív.

105.

$$\boxed{x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

106.

107.

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

108.

Mivel $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ és a tangens periódusa π ,

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

109.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

110.

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

111.

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = (2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0.$$

Tehát

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \sin x = 1.$$

Így

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

112.

$$\cos x(2 \sin x - 1) = 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$\cos x = 0 \quad \text{vagy} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Ezért

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

vagy

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

113.

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

114.

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

115.

$$T_{\sin} = 2\pi, \quad T_{\cos} = 2\pi, \quad T_{\tan} = \pi.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

nem értelmezett, ha $\cos x = 0$, vagyis

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

116.

H. Vegyes vizsgaszintű feladatok

$$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

Másrészt

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

tehát

$$1 + \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 1.$$

A szorzatszabály szerint

$$a_n \rightarrow 1.$$

117.

Monotonitás:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

Tehát növekvő. Továbbá

$$2n+1 < 2n+4 = 2(n+2),$$

így

$$a_n < 2.$$

Növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

118.

$$\left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| = \frac{5}{n+2}.$$

A feltétel:

$$\frac{5}{n+2} < 10^{-3} \Leftrightarrow n+2 > 5000 \Leftrightarrow n > 4998.$$

A legkisebb megfelelő természetes szám:

$$N = 4999.$$

119.

Osszunk 3^n -nel:

$$\frac{3^n + n^4}{3^n + 2n^4} = \frac{1 + \frac{n^4}{3^n}}{1 + 2\frac{n^4}{3^n}}.$$

Az exponenciális növekedés gyorsabb minden rögzített fokú polinoménál:

$$\frac{n^4}{3^n} \rightarrow 0.$$

Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^4}{3^n + 2n^4} = 1.$$

120.

III. Vizsga előtti ellenőrzőlista

- El tudom mondani az ε - N definíciót saját szavaimmal.
- Tudom, hogy a konvergens sorozat korlátos, de a megfordítás nem igaz.
- Tudok monotonitást $a_{n+1} - a_n$ előjelével vizsgálni.
- Racionális határértéknél felismerem a domináns n -hatványt.
- Exponenciális határértéknél felismerem a legnagyobb alapot és az e -típusú alakokat.
- Tudom használni a rendőrelvet $\sin/\cos$ becsléseknél.
- Fok és radián között biztosan váltok.
- Ismerem a nevezetes trigonometrikus értékeket és a periódusokat.
- Trigonometrikus egyenletnél az összes megoldást megadom $k \in \mathbb{Z}$ paraméterrel.